EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….054**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 1 + i\sin 1$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2)$ la punctul $C(0,1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 25$ și dreapta de ecuație $x + y = 0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(5, 2)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(4, 3, 2)$, $B(3, 2, 4)$, $C(2, 4, 3)$ și $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\sin x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ funcția $f: M_3(\mathbf{C})\to M_3(\mathbf{C})$, $f(X)=X^{2007}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2 și A^3.

(4p) **c)** Să se verifice că matricea I_3+A este inversabilă și că inversa sa este I_3-A+A^2.

(2p) **d)** Să se arate că , dacă $Y\in M_3(\mathbf{C})$ și $Y\cdot A=A\cdot Y$, atunci există $a,b,c\in\mathbf{C}$,

astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $Z=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ unde $a,b,c\in\mathbf{C}$ și $det(Z)=0$,

atunci $Z^3=O_3$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că funcția f **nu** este injectivă.

(2p) **g)** Să se demonstreze că funcția f **nu** este surjectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x)=2x-\dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f este bijectivă .

(2p) **g)** Dacă notăm cu $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ inversa funcției f , să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{2}} g(x)dx$.